3) b) $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $\quad u_k \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{k}} \leqslant u_{k-1}$

$$\Rightarrow 2u_k \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 2u_{k-1}$$

$$\Rightarrow 2\sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 2\sum_{k=1}^{n} u_{k-1}$$

$$\Rightarrow 2\sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant v_n \leqslant 2\sum_{k=1}^{n} u_{k-1}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \frac{v_n}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} u_{k-1}$$

• $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$

$$= (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

$$= \sqrt{n+1} - 1$$

• $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} u_{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$

$$= (\sqrt{1} - 0) + (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + \dots + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$

$$= \sqrt{n}$$

Qarray.tn -Agra Blech- Qarray.tn